SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Davide Guidetti

REGOLARITÀ MASSIMALE PER IL PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET PARABOLICO IN SPAZI DI FUNZIONI HÖLDERIANE SOLO RISPETTO ALLE VARIABILI SPAZIALI

21 marzo 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. Si dà un nuovo risultato di regolarità massimale per il problema misto di Cauchy-Dirichlet parabolico: essenzialmente si forniscono condizioni necessarie e sufficienti (sotto ipotesi naturali di regolarità dei coefficienti e dell' aperto Ω) sui dati del problema affinchè ammetta una soluzione u tale che per $t > 0$ $u(t,.)$ appartenga a $C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$ (con θ in $]0, 1[$) e $\partial_t u(t,.)$ appartenga a $C^{\theta}(\bar{\Omega})$ e, inoltre, per un certo μ in $[0, 1[$, $\|u(t,.)\|_{2m+\theta} + \|\partial_t u(t,.)\|_{\theta} = O(t^{-\mu})$ per t che tende a 0. Ciò costituisce una generalizzazione di un teorema dovuto a M. Lopez Morales di cui si dà una nuova prova, basata su tecniche di semigruppi analitici.

Abstract. We give a maximal regularity result for the parabolic Cauchy-Dirichlet mixed problem: in essence, we furnish necessary and sufficient conditions (under suitable assumptions of regularity of the coefficients and of the open set Ω) on the data of the problem in order to get a solution u such that for $t > 0$ $u(t,.)$ belongs to $C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$ (with θ in $]0, 1[$) and $\partial_t u(t,.)$ belongs to $C^{\theta}(\bar{\Omega})$ and, moreover, for a certain μ in $[0, 1[$, $\|u(t,.)\|_{2m+\theta} + \|\partial_t u(t,.)\|_{\theta} = O(t^{-\mu})$ for t going to 0. This is a generalization of a theorem due to M. Lopez Morales, a new proof of which, using analytic semigroup techniques, is given.

Consideriamo il classico problema di Cauchy-Dirichlet parabolico

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = A(x,\partial_x)u(t,x) + f(t,x), && (t,x) \in [0,T]\times\bar{\Omega} \\ &\gamma_0 u(t,x') = 0, && (t,x') \in \partial\Omega, \\ &u(0,x') = u_0(x), && x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

ove $A(x,\partial_x)$ è un operatore fortemente ellittico del secondo ordine a coefficiente opportunamente regolari, Ω è un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare; γ_0 indica l'operatore di traccia su $\partial\Omega$.

Siamo interessati a soluzioni "strette", vale a dire a soluzioni dotate della derivata prima rispetto a t e delle derivate prime e seconde rispetto a x continue in $[0,T]\times\bar{\Omega}$; a tale riguardo esistono dei *risultati classici dovuti a Solonnikov (vedi [SO]) relativi a f hölderiana di esponente* θ ($\in]0,1[$) rispetto alla metrica parabolica in $[0,T]\times\bar{\Omega}$: precisamente, se $\partial\Omega$ è una varietà di classe $C^{2+\theta}$, f è hölderiana di esponente θ rispetto alla metrica parabolica, $u_0 \in C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$, $\gamma_0 u_0 = 0$ e $\gamma_0(A(.,\partial_x)u_0 + f(0,.)) = 0$, il problema *(1)* possiede un' unica soluzione u in senso stretto e tale soluzione u è tale che $\partial_t u$ assieme alle derivate prime e seconde rispetto a x è hölderiana di esponente θ rispetto alla metrica parabolica. Questo risultato è di regolarità massimale, in quanto le condizioni assegnate sui dati sono necessarie e sufficiente per ottenere soluzioni della regolarità detta.

Consideriamo ora il problema analogo per una classe più ampia di dati: precisamente, consideriamo una f che sia continua su $[0,T]\times\bar{\Omega}$, ma hölderiana di esponente θ soltanto rispetto alle variabili x, uniformemente per $t \in [0,T]$ (per indicare quest' ultima proprietà, scriveremo che $f \in B([0,T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))$). Cominciamo col citare qualche risultato relativo a quest' ultimo caso; nel *lavoro [KCL] è stato considerato il problema in* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ *senza condizioni al contorno: si* dimostra che, se i coefficienti di $A(x,\partial_x)$ sono limitati e θ-hölderiani su $\mathbb{R}^n$, l' operatore è uniformemente fortemente ellittico, $u_0 = 0$, f è uniformemente continua e limitata su $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ e θ-hölderiana rispetto alle variabili x uniformemente in t, il problema

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = A(x,\partial_x)u(t,x) + f(t,x), && (t,x) \in [0,T]\times \mathbb{R}^n, \\ &u(0,x') = 0, && x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2}$$

possiede un' unica soluzione u appartenente assieme a $\partial_t u$ e a $\partial_x{}^\alpha u$ per ogni α con $|\alpha| \le 2$ alla sopra citata classe che contiene f.

Nel lavoro [LU] A. Lunardi studia il problema con condizioni al contorno del primo ordine

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = A(x,\partial_x)u(t,x) + f(t,x), && (t,x) \in [0,T]\times\bar{\Omega} \\ &B(x',\partial_x)\, u(t,x') = 0, && (t,x') \in \partial\Omega, \\ &u(0,x) = u_0(x), && x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{3}$$

e, sotto ipotesi naturali sui coefficienti, prova che il problema (3) possiede una soluzione con la regolarità sopra citata se e solo se $f \in C([0,T]\times\bar{\Omega}) \cap B([0,T], C^\theta(\bar{\Omega}))$, $u_0 \in C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$ e $B(x',\partial_x)\, u_0 = 0$ su $\partial\Omega$.

Naturalmente ci si aspetta un risultato analogo anche nel caso di condizioni di Dirichlet su $\partial\Omega$; precisamente ci si aspetta che le condizioni necessarie e sufficienti nel caso di Dirichlet siano

$$(C1)\; f \in C([0,T]\times\bar{\Omega}) \cap B([0,T]; C^\theta(\bar{\Omega})),\; u_0 \in C^{2+\theta}(\bar{\Omega}),\; \gamma_0 u_0 = 0,\; \gamma_0(A(.,\partial_x)u_0 + f(0,.)) = 0;$$

(l' ultima condizione deriva dal fatto che l'operatore al contorno è di ordine 0).

Questo problema è stato studiato da Sinestrari e von Wahl in [SW]; nel loro lavoro essi provano varie proprietà di regolarità della soluzione u, ma non provano alcun risultato di regolarità massimale; anzi, [SW] riporta un controesempio dovuto a Wiegner, che mostra che le condizioni (C1) non sono sufficienti a ottenere una soluzione con la regolarità voluta. Manca in effetti in (C1) una condizione necessaria; tale condizione è stata data per la prima volta la M. Lopez nel lavoro [ML] (anche se non è chiaro che l'autore sia consapevole della necessità della condizione). Vediamola: sia u una soluzione stretta di (1) con la regolarità vouta ($u \in C^1([0,T]; C(\bar{\Omega})) \cap C([0,T]; C^2(\bar{\Omega})) \cap B([0,T]; C^{2+\theta}(\bar{\Omega}))$ con $\partial_t u \in B([0,T]; C^\theta(\bar{\Omega}))$; dalla condizione al contorno in (1) segue $\gamma_0(f(t,.)) = -\gamma_0(A(.,\partial_x)u(t,.))$; per $0 \le s \le t \le T$ si ha

$$\begin{aligned} \|u(t,.) - u(s,.)\|_{2,\bar{\Omega}} &\le C(\|u(t,.) - u(s,.)\|_{\theta,\bar{\Omega}})^{\theta/2}\,(\|u(t,.) - u(s,.)\|_{2+\theta,\bar{\Omega}})^{1-\theta/2}, \\ &\le \text{cost}\,(t-s)^{\theta/2} \end{aligned} \tag{4}$$

usando il fatto che u è lipshitziana a valori in $C^\theta(\bar{\Omega})$ e che esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$ $\|f\|_{2,\bar{\Omega}} \le C\,\|f\|_{\theta,\bar{\Omega}}^{\theta/2}\,\|f\|_{2+\theta,\bar{\Omega}}^{1-\theta/2}$. Segue subito che $\gamma_0 f \in C^{\theta/2}([0,T]; C(\partial\Omega))$; in

altre parole, la traccia di f su $\partial\Omega$ deve essere hölderiana di esponente $\frac{\theta}{2}$ nella variabile t. Vale allora il seguente risultato:

Teorema 1. ([LM]) *Sia $\partial\Omega$ varietà di classe $C^{2+\theta}$, per u certo $\theta \in]0, 1[$; condizioni necessarie e sufficienti affinchè il problema (1) possieda una soluzione stretta u con $\partial_t u$ e $\partial_x^{\alpha} u$ ($|\alpha| \leq 2$) in $B([0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega})$ è che valgano le condizioni (C1) e, in più, $\gamma_0 f \in C^{\theta/2}([0, T]; C(\partial\Omega))$.*

Vogliamo ora dare una generalizzazione del teorema 1, che è un caso particolare di un risultato più generale esposto in [GU]; cominciamo innanzi tutto con l' osservare che il teorema 1 (così come, più in generale i risultati classici di regolarità massimale) non mette in rilievo l'importante proprietà regolarizzante delle equazioni parabolici: precisamente non mette in rilievo il fatto che, partendo da un dato iniziale u_0 relativamente poco regolare, per tempi positivi la soluzione u acquista immediatamente tutta la regolarità permessa da f. Negli ultimi anni sono apparsi nuovi risultati di regolarità massimale che non adombrano questa proprietà (vedi [AN]). L' idea che svilupperò è di partire da una f tale che $\|f(t, .)\|_{\theta,\bar{\Omega}} \leq C\, t^{-\mu}$ ($t \in]0, T]$), per un certo $\mu \in [0, 1[$ (scriveremo $f \in B_{\mu}(]0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))$; cercheremo naturalmente una soluzione u con regolarità corrispondente; osserviamo che, poichè $\partial_t u$ ha una singolarità debole per $t = 0$, $u(0,.)$ è ben definito. Ora si può dimostrare che, se $2(1-\mu) + \theta \notin \mathbb{N}$, $\{u(0,.) \mid u \in C^1(]0, T]; C(\bar{\Omega})) \cap C(]0, T]; C^2(\bar{\Omega})) \cap B_{\mu}(]0, T]; C^{2+\theta}(\bar{\Omega})), \partial_t u \in B_{\mu}(]0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))\} = C^{2(1-\mu)+\theta}(\bar{\Omega})\}$.
Vale il seguente teorema:

Teorema 2. *Siano Ω e $A(x,\partial_x)$ come nell' enunciato del teorema 1; siano $\theta \in]0, 1[\cup]1, 2[$ e $\mu \in [0, 1[$, tali che $2(1-\mu) + \theta \notin \mathbb{N}$; condizioni necessarie e sufficienti affinchè (1) possieda una soluzione u $\in C^1(]0, T]; C(\bar{\Omega})) \cap C(]0, T]; C^2(\bar{\Omega})) \cap B_{\mu}(]0, T]; C^{2+\theta}(\bar{\Omega}))$ con $\partial_t u \in B_{\mu}(]0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))\} = C^{2(1-\mu)+\theta}(\bar{\Omega})$ sono che :*

(I) $f \in C(]0, T]; C(\bar{\Omega})) \cap B_{\mu}(]0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))$;

(II) $u_0 \in C^{2(1-\mu)+\theta}(\bar{\Omega})$;

(III) $\gamma_0 f \in C^{\theta/2}_{\mu}(]0, T]; C(\partial\Omega))$;

(IV) $\gamma_0 u_0 = 0$;

(V) se $\theta > 2\mu$, $\gamma_0(A(.,\partial_x)u_0 + f(0, .)) = 0$.

Prima di dare un cenno della dimostrazione, qualche parola di commento sul teorema 2: innanzi tutto, a causa della singolarità per $t = 0$, richiederemo che la prima condizione in (1) valga soltanto per $t > 0$; le condizioni (I), (II) e (IV) sono chiare; veniamo alla condizione (III): intendiamo che valga la maggiorazione $\|\gamma_0 f(t,.) - \gamma_0 f(s,.)\|_{0,\partial\Omega} \leq \text{cost}\ (t - s)^{\theta/2}\ s^{-\mu}$; la necessità di (III) si può provare con un ragionamento analogo a quello per la condizione corrispondente relativa al problema 1. Per quanto riguarda la condizione (V), osserviamo che vale il seguente

Lemma 1. *Siano E uno spazio di Banach, $\alpha \in]0, 1[$, $\mu \in [0, 1[$; allora,*
(a) se $\alpha > \mu$, $C^{\alpha}_{\mu}(]0, T]; E) \subseteq C^{\alpha-\mu}([0, T]; E)$;
(b) se $\alpha < \mu$, $C^{\alpha}_{\mu}(]0, T]; E) \subseteq B_{\mu-\alpha}(]0, T]; E)$.

Perciò, se $2\mu < \theta$, $\gamma_0 f(0,.)$ è ben definito (anche se non è necessariamente ben definito $f(0,.)$). Inoltre, per le solite stime interpolatorie, in tal caso $u \in C^{\theta/2}_{\mu}(]0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$ e quindi, ancora per il lemma 1, $A(.,\partial_x)u(0,.)$ è ben definito. In tal modo si giustifica la condizione (V).
Veniamo ora alla sufficienza delle condizioni (I)-(V); ci limitiamo a considerare il caso $u_0 = 0$. Quindi, (V) diventa: se $\theta > 2\mu$, $\gamma_0(f(0, .)) = 0$.
Introduciamo ora la seguente convenzione notazionale: nel seguito scriveremo $f(t)$ invece di $f(t,.)$, $u(t)$ invece di invece di $u(t,.)$, ecc.. E' ben noto (vedi [ST]) che, posto

$D(A) := \{u \in \cap_{1\leq p<+\infty} W^{2,p}(\Omega) |\ \gamma_0 u = 0,\ A(.,\partial_x)u \in C(\bar{\Omega})\}$, $Au := A(.,\partial_x)u$, A è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ (non fortemente continuo in 0) nello spazio $C(\bar{\Omega})$; poniamo

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds \tag{5}$$

u è il candidato naturale a essere la soluzione di (1). Cerchiamo delle stime per $T(t)$ n spazi di funzioni hölderiane; ricordando la formula $T(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma \exp(\lambda t)\, (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda$ sul solito arco parametrizzato γ con sostegno in $\rho(A)$ che va da $\infty e^{-i\theta_0}$ a $\infty e^{i\theta_0}$ per un opportuno $\theta_0 \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, partiamo da una stima di $(\lambda - A)^{-1}$: il seguente risultato è la generalizzazione di una stima dovuta a Bolley, Camus, Pham-The-Lai (vedi [BCP]):

Lemma 2. *Sotto l' ipotesi del teorema 2, esistono $R \geq 0$ ed $M > 0$ tali che, se $|Arg(\lambda)| \leq \theta_0$ e $|\lambda| \geq R$, $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}(C^{\theta}(\bar{\Omega})) \subseteq C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$ e vale la seguente stima per ogni $f \in C^{\theta}(\bar{\Omega})$:*

$$|\lambda| \, \|(\lambda - A)^{-1} f\|_{\theta,\bar{\Omega}} + \|(\lambda - A)^{-1} f\|_{2+\theta,\bar{\Omega}} \leq M \, [\, \|f\|_{\theta,\bar{\Omega}} + |\lambda|^{\theta/2} \|\gamma_0 f\|_{0,\partial\Omega}]. \qquad (6)$$

Dal lemma 2 segue la stima

$$\|T(t)f\|_{\theta,\bar{\Omega}} + t \, \|T(t)f\|_{2+\theta,\bar{\Omega}} \leq C \, [\, \|f\|_{\theta,\bar{\Omega}} + t^{-\theta/2} \|\gamma_0 f\|_{0,\partial\Omega}] \qquad (7)$$

per $t \in [0, T]$. Poniamo ora

$$T^{(-1)}(t) := \int_0^t T(s)\, ds = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} \exp(\lambda t) \; \lambda^{-1} (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda \qquad (8)$$

(se γ " gira a destra di 0).

Da (6) segue la stima

$$\|T^{(-1)}(t)f\|_{\theta,\bar{\Omega}} + t \, \|T^{(-1)}(t)f\|_{2+\theta,\bar{\Omega}} \leq C \, [t \, \|f\|_{\theta,\bar{\Omega}} + t^{1-\theta/2} \|\gamma_0 f\|_{0,\partial\Omega}] \qquad (9)$$

Poniamo $u_1(t) = \int_0^t T(t-s) \, [f(s) - f(t)] \, ds$, $u_2(t) = T^{(-1)}(t) \, f(t)$; è chiaro che $u = u_1 + u_2$; da (7) (interpolando) e dalle ipotesi su f segue facilmente che

$$\|T(t-s) \, [f(s) - f(t)]\|_{2,\bar{\Omega}} \leq \text{cost} \, (t-s)^{\theta/2 - 1} \, s^{-\mu},$$

da cui segue che $u_1 \in C(]0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$ e quindi che $u \in C(]0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$; sempre con argomenti più o meno standard, si vede che $u \in C^1(]0, T]; C(\bar{\Omega}))$; quindi, per $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$.

La parte cruciale della dimostrazione sta nel provare che $\partial_t u$ e $Au \in B_{\mu}(]0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))$; basta chiaramente provarlo per uno dei due; il risultato per l' altro seguirà immediatamente per differenza. Verifichiamo allora che $Au \in B_{\mu}(]0, T]; C^{\theta}(\bar{\Omega}))$. Cominciamo con Au_2: si ha per $t > 0$

$Au_2(t) = A\,T^{(-1)}(t)\,f(t) = T(t)\,f(t) - f(t)$; f appartiene per ipotesi a $B_\mu(]0,T];C^\theta(\bar\Omega))$; inoltre,

$$\|T(t)f(t)\|_{\theta,\bar\Omega} \le C[\|f(t)\|_{\theta,\bar\Omega} + t^{-\theta/2}\|\gamma_0 f(t)\|_{0,\partial\Omega}];$$

osserviamo ora che da (III) e (V) e dal lemma 1 segue che in ogni caso

$$\|\gamma_0 f(t))\|_{0,\partial\Omega} \le \text{cost}\; t^{\theta/2-\mu};$$

da ciò si ha che $Au_2 \in B_\mu(]0,T];C^\theta(\bar\Omega))$; per dimostrare l'analogo risultato per Au_1, ricordiamo che, per un risultato di A. Lunardi lo spazio di interpolazione complesso $(C(\bar\Omega), D(A))_{\theta/2,\infty}$ coincide con $\{g \in C^\theta(\bar\Omega))|\ \gamma_0 g = 0\}$. Verificheremo che $Au_1 \in B_\mu(]0,T];(C(\bar\Omega), D(A))_{\theta/2,\infty})$. A tale scopo facciamo l'ipotesi semplificante che $[0,+\infty[\ \subseteq \rho(A)$; in tal caso, possiamo utilizzare la seguente caratterizzazione, dovuta a P. Grisvard di $(C(\bar\Omega), D(A))_{\theta/2,\infty}$:

$$(C(\bar\Omega), D(A))_{\theta/2,\infty} = \{g \in C(\bar\Omega)|\ \xi \to \xi^{\theta/2}\|A(\xi - A)^{-1} g\|_{0,\bar\Omega} \text{ è limitata su } [0,+\infty[\}. \qquad (10)$$

Con qualche modificazione rispetto al classico metodo di Da Prato-Grisvard (vedi [DPG]), si ha

$$\xi^{\theta/2}\ \|A(\xi - A)^{-1}\ u_1(t)\|_{0,\bar\Omega}$$

$$= \xi^{\theta/2}\ \|(2\pi i)^{-1}\int_0^t \Big(\int_\gamma \exp(\lambda(t-s))\,\lambda\,(\xi-\lambda)^{-1}A(\lambda - A)^{-1}[f(s) - f(t)]\,d\lambda\Big)\,ds\ \|_{0,\bar\Omega}$$

$$\le \text{cost}\ \ \xi^{\theta/2}\int_0^t \Big(\int_\gamma \exp(\text{Re}\,\lambda(t-s))\,|\lambda|\,|\xi-\lambda|^{-1}\|(\lambda - A)^{-1}[f(s) - f(t)]\ \|_{2,\bar\Omega}\ d|\lambda|\Big)\,ds\,.$$

Utilizzando (6) e le stime interpolatorie si ottiene

$$\|(\lambda - A)^{-1}[f(s) - f(t)]\ \|_{2,\bar\Omega} \le \text{cost}\ [\ |\lambda|^{-\theta/2}\|f(s) - f(t)\|_{\theta,\bar\Omega} + \|\gamma_0(f(s) - f(t))\|_{0,\partial\Omega}]$$
$$\le \text{cost}\ [\ |\lambda|^{-\theta/2}\ s^{-\mu} + (t-s)^{\theta/2}\ s^{-\mu}],$$

da cui si ottiene $\xi^{\theta/2}\ \|A(\xi - A)^{-1}\ u_1(t)\|_{0,\bar\Omega} \le \text{cost}\ t^{-\mu}$.

Bibliografia

[AN] S. Angenent, "Nonlinear analytic semiflows", Proc. Royal Soc. Edinburgh, 115A, 94-107 (1990).

[BCP] P. Bolley, J. Camus, P. The Lai, "Estimation de la résolvente du probléme de Dirichlet dans les espaces de Hölder", C. R. A. S. Paris, 305, Serie I, 253-256 (1987).

[DPG] G. Da Prato, P. Grisvard, "Sommes d' opérateurs linéaires et equations différentielles opérationelles", J. Math. Pures Appl. 54, 305-387 (1975).

[GU] D. Guidetti, "Optimal regularity for mixed parabolic problems in spaces of functions which are hölder continuous with respect to space variables", Dipartimento di Matematica , Università di Bologna, 19 (11/12/1995).

[KCL] S. Kruzhkov, A. Castro, M. Lopez, " Mayoraciones de Schauder y teorema de existencia de las soluciones del problema de Cauchy para ecuaciones parabolicas lineales y no lineales (I)", Rev. Ciencias Matemàticas, vol. 1, n. 1, 55-76 (1980).

[LU] A. Lunardi, "Maximal space regularity in nonhomogeneous initial boundary value parabolic problems", Numer. Funct. Anal. Optim. 10, 323-349 (1989).

[ML] M. Lopez Morales, "Primer problema de contorno para ecuaciones parabolicas lineales y no lineales", Rev. Ciencias Matemàticas, vol. 13, n. 1, 3-20 (1992).

[SO] V. A. Solonnikov, "On the boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form", Proc. Steklov Inst. 83 (1965), Ed. Am. Math. Soc. (1967)

[ST] H. B. Stewart, "Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions", Trans. Amer. Math. Soc. 259, 299-310 (1980).

[SW] E. Sinestrari, W. von Wahl, "On the solutions of the first boundary value problem for the linear parabolic equations", Proc. Royal Soc. Edinburgh 108A, 339-355 (1988).